BTS – Groupement C – Mathématiques – 15 mai 2012 - Correction

Exercice 1 (9 points)

Partie 1 On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \frac{1}{2}y = \frac{13}{2}$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$

   C'est une équation de la forme $y' + ay = 0$ où k est une constante (ici $a = \frac{1}{2}$)

   On sait que la solution de ce type d'équation est $y = Ce^{-at}$ où C est une constante réelle quelconque.

   $\boxed{\text{Donc la solution générale de l'équation } (E) \text{ est :} y = Ce^{-\frac{1}{2}t},\ C \in \mathbb{R}.}$

2. Déterminer le réel k tel que la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = k$ soit une solution particulière de (E).
   On a $g'(t) = 0$.

   Donc, si g est une solution de (E) alors : $g' + \frac{1}{2}g = \frac{13}{2}$

   Donc, $0 + \frac{1}{2}k = \frac{13}{2}$

   Donc, $\boxed{k = 13}$

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
   La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant, à la solution de l'équation sans second membre associée, une solution particulière de l'équation complète (E) :

   $\boxed{y = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 13}$ où C est une constante réelle quelconque.

4. Déterminer la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$, solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

   On a, puisque f est une solution de (E) : $f(t) = Ce^{\frac{-1}{2}t} + 13$
   Or $f(0) = 0$
   Donc $Ce^0 + 13 = 0$, soit $C = -13$.

   $\boxed{\text{La fonction } f \text{ cherchée, solution de } (E) \text{ est donc :} f(t) = -13e^{\frac{-1}{2}t} + 13 \text{ ou encore :} f(t) = 13\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right).}$

Partie 2 Étude de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 13\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)$.

1. Calculer $f'(t)$.

   On sait que $(e^u)' = u'e^u$. Donc $\left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$

   On en déduit : $f'(t) = 13\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t}\right)$

   Donc : $\boxed{f'(t) = \frac{13}{2}e^{-\frac{1}{2}t}}$

2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
   Pour tout réel t de l'intervalle : $f'(t) > 0$.

   $\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

3. Démontrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale $\mathscr{D}$ dont on précisera une équation.

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

   On en déduit que : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$

   Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(13\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\right) = 13$

   Donc : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 13}$.

   $\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ a donc une asymptote horizontale, d'équation } y = 13 \text{ au voisinage de } +\infty.}$

4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T sur le graphique joint.

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par la formule : $y = f'(a)(t-a)+f(a)$

On a : $f(0) = 0$ et $f'(0) = \frac{13}{2}$. Donc la tangente T a pour équation : $\boxed{y = \frac{13}{2}t}$

Partie 3

1. Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10mm.s^{-1}.
Sur le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ passe au-dessus de la droite d'équation $y = 10$, au voisinage de $t = 3$.

   On peut donc dire que la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm.s^{-1} au bout de 3 secondes environ.

2. Retrouver le résultat précédent par le calcul.
Cela revient à résoudre l'inéquation :

$$f(t) \geqslant 10$$
$$13\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right) \geqslant 10$$
$$13-13e^{-\frac{1}{2}t} \geqslant 10$$
$$-13e^{\frac{-1}{2}t} \geqslant -3$$
$$e^{-\frac{1}{2}t} \leqslant \frac{3}{13}$$
$$-\frac{1}{2}t \leqslant \ln\left(\frac{3}{13}\right)$$
$$t \geqslant -2\ln\left(\frac{3}{13}\right)$$

Finalement : $\boxed{t \geqslant 2\ln\left(\frac{13}{3}\right), \text{ avec } 2\ln\left(\frac{13}{3}\right) \approx 2{,}93.}$

3. Calcul de la vitesse moyenne de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$.

On sait que $V_m = \dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t$

Donc : $V_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 13-13\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t$

Une primitive de $f(t)=13-13\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}t}$ est $F(t)=13t-\dfrac{13}{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, soit $F(t)=13t+26\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}t}$

Donc : $V_m = \dfrac{1}{2}\left[13t+26\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right]_2^4$

Donc : $V_m = \dfrac{1}{2}\left(52+26\mathrm{e}^{-2}-26-26\mathrm{e}^{-1}\right)$

Donc : $V_m = 13+13\mathrm{e}^{-2}-13\mathrm{e}^{-1}$

Donc : $\boxed{V_m = 13\left(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\approx 9{,}98}$

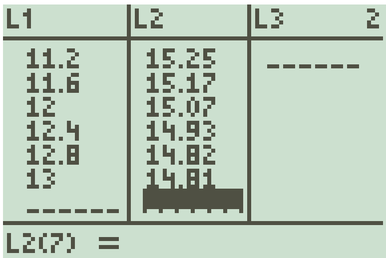
Exercice 2 (11 points)

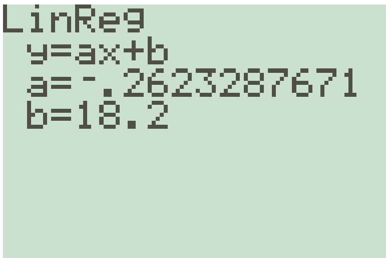
Partie A

Une étude statistique sur les variations de la cote (en mm) en fonction du taux d'humidité donne les résultats suivants :

Rang : i	1	2	3	4	5	6
t_i : taux d'humidité	11,2	11,6	12	12,4	12,8	13
C_i : cote (en mm)	15,25	15,17	15,07	14,93	14,82	14,81

1. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ d'ajustement de C en fonction de t, obtenue par la méthode des moindres carrés.





D'après les copies d'écran de calculatrice ci-dessus, on peut dire que $\mathscr{D}$ a pour équation $C=-0{,}262t+18{,}2$.

2. Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique (voir page suivante).
3. Donner, par la méthode de votre choix, le taux d'humidité du bois pour obtenir la cote de 15 mm
On peut utiliser soit une méthode basée sur l'équation de la droite de régression $\mathscr{D}$, soit sur une lecture graphique :

- en utilisant l'équation de la droite $\mathscr{D}$: $C=-0{,}262t+18{,}2$

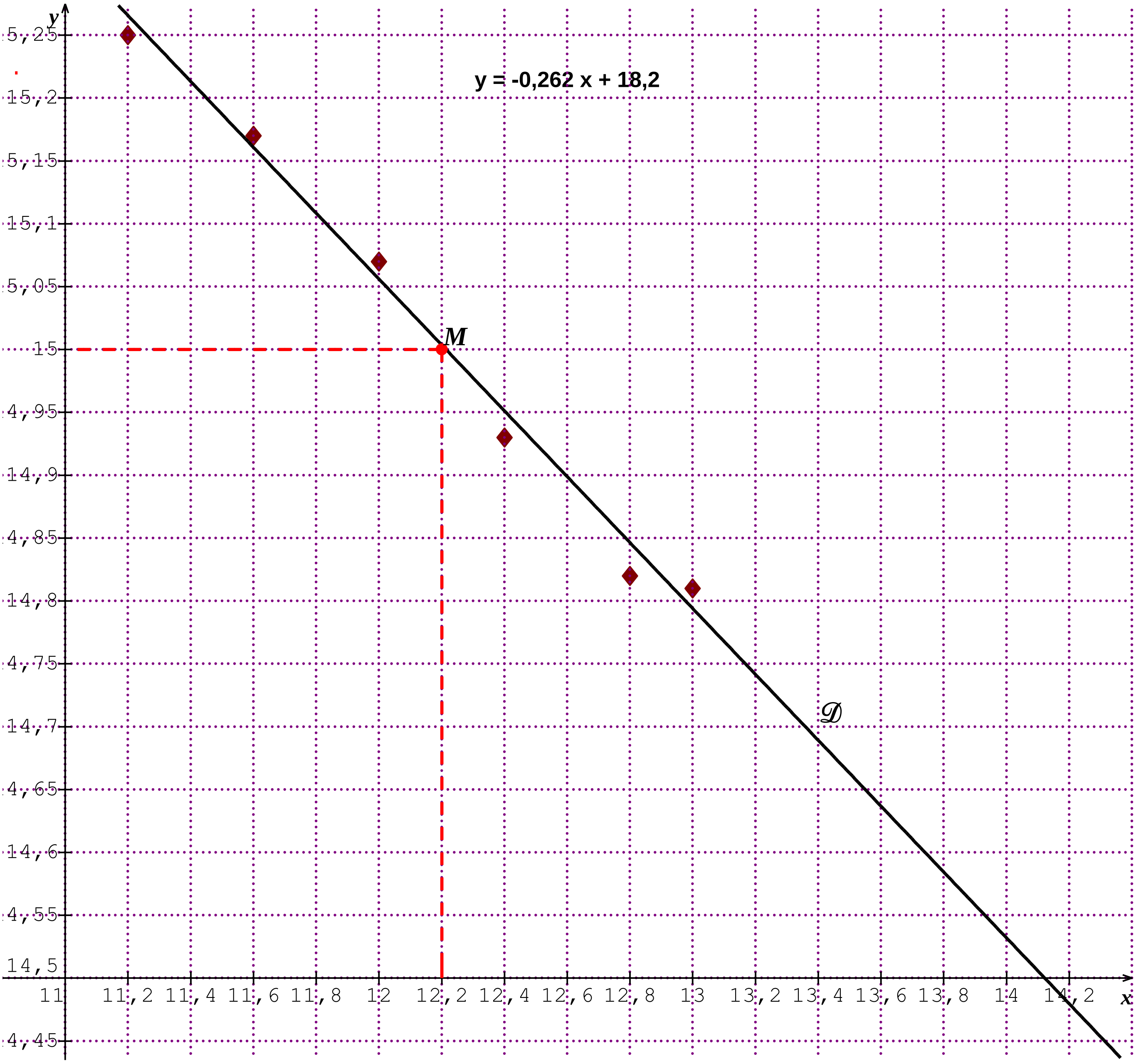
  On doit avoir : $-0{,}262t+18{,}2=15$

  donc : $-0{,}262t=-3{,}2$

  donc : $\boxed{t=\dfrac{3{,}2}{0{,}262}\approx 12{,}2.}$

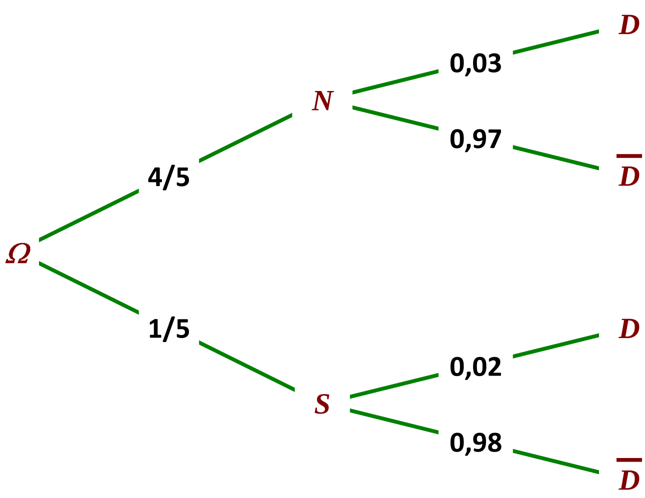
- par lecture graphique (voir page suivante):
  On cherche le point de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 15. C'est le point $M(12{,}2\ ;\ 15)$.

  On lit son abscisse : $\boxed{t\approx 12{,}2}$



Partie B

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités pondéré.
On note les évènements :
N : la pièce choisie est issue de l'atelier NORD
$S = \overline{N}$: la pièce choisie est issue de l'atelier SUD
D : la pièce présente un défaut de finition.



D'après l'énoncé, on a :

$p(N) = \dfrac{400}{500} = \dfrac{4}{5}$

$p(S) = \dfrac{100}{500} = \dfrac{1}{5}$

$p_N(D) = 0{,}03$

$p_S(D) = 0{,}02$

La probabilité que la pièce ne présente aucun défaut est donc : $p(\bar{D}) = p(\bar{D} \cap N) + p(\bar{D} \cap S)$

$$\boxed{p(\bar{D}) = \frac{4}{5} \times 0{,}97 + \frac{1}{5} \times 0{,}98 = 0{,}972}$$

Partie C

La cote d'une pièce est une variable aléatoire C qui suit la loi $\mathcal{N}(15\,;\,\sigma)$.

Une pièce est acceptée si la cote se situe dans l'intervalle [14,9 ; 15,1].

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée lorsque $\sigma = 0{,}05$?
   La variable C suit la loi $\mathcal{N}(15\,;\,0{,}05)$.

   Posons $T = \dfrac{C-15}{0{,}05}$. On sait que T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

   On a : $p(14{,}9 \leqslant C \leqslant 15{,}1) = p\left(\dfrac{14{,}9-15}{0{,}05} \leqslant \dfrac{C-15}{0{,}05} \leqslant \dfrac{15{,}1-15}{0{,}05}\right)$

   $= p(-2 \leqslant T \leqslant 2)$

   $= \Pi(2)-\Pi(-2)$ où Π est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

   $= \Pi(2)-(1-\Pi(2))$

   $= 2\Pi(2)-1$

   $= 2\times 0{,}9772-1$ par lecture de la table de Π

   $= 0{,}9544$

   $\boxed{\text{Donc la probabilité que la pièce soit acceptée lorsque } \sigma = 0{,}05 \text{ est } 0{,}9544.}$

2. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'une pièce soit refusée soit égale à 0,002.
   La variable C suit la loi $\mathcal{N}(15\,;\,\sigma)$

   Posons encore $T = \dfrac{C-15}{\sigma}$.

   On a : $p(14{,}9 \leqslant C \leqslant 15{,}1) = p\left(-\dfrac{0{,}1}{\sigma} \leqslant T \leqslant \dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) = 2\Pi\left(\dfrac{0{,}1}{\sigma}\right)-1$

   Dire qu'une pièce est refusée avec une probabilité de 0,002 équivaut à dire qu'elle est acceptée avec une probabilité de 0,998.

   On en déduit : $p(14{,}9 \leqslant C \leqslant 15{,}1) = 0{,}998 \iff 2\Pi\left(\dfrac{0{,}1}{\sigma}\right)-1 = 0{,}998$

   $\iff \Pi\left(\dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}999$

   $\iff \dfrac{0{,}1}{\sigma} = 3{,}1$ (par lecture inverse de la table de Π)

   $\iff \boxed{\sigma = 0{,}032}$

   $\boxed{\text{Donc, pour qu'une pièce soit refusée avec une probabilité de } 0{,}002, \text{ il faut que } \sigma = 0{,}032.}$

Partie D

1. Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1
   H_0 : la moyenne des cotes des 50 pièces est $m = 15$
   H_1 : $m \neq 15$.
2. a) Déterminer le réel h tel que $p(15-h \leqslant \overline{C} \leqslant 15+h) = 0{,}95$
   On sait que la variable aléatoire $\overline{C}$ suit la loi $\mathcal{N}(15\,;\,0{,}02)$.

   Posons $Y = \dfrac{\overline{C}-15}{0{,}02}$. On sait que Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

   On a les équivalences : $p\left(15-h \leqslant \overline{C} \leqslant 15+h\right) = 0{,}95 \iff p\left(-\dfrac{h}{0{,}02} \leqslant Y \leqslant \dfrac{h}{0{,}02}\right) = 0{,}95$

   $\iff 2\Pi\left(\dfrac{h}{0{,}02}\right)-1 = 0{,}95$

   $\iff \Pi\left(\dfrac{h}{0{,}02}\right) = 0{,}975$

   $\iff \dfrac{h}{0{,}02} = 1{,}96$

   $\iff \boxed{h = 0{,}0392}$

La zone d'acceptation à 95% de confiance, est donc l'intervalle [14,9608 ; 15,0392].

b) Énoncer la règle de décision du test.

Si, dans un échantillon de 50 pièces, la cote moyenne est dans la zone critique (en dehors de l'intervalle d'acceptation), alors on refuse l'hypothèse nulle et on accepte l'hypothèse alternative H_1.
Sinon on accepte l'hypothèse nulle H_0 et on rejette l'hypothèse alternative H_1.

3. Au vu de l'échantillon de 50 pièces, peut-on considérer que la cote moyenne est égale à 15 mm ?
Dans l'échantillon test, la cote moyenne est égale à 15,02 mm.
Cette cote moyenne n'est pas dans la zone critique.

$\boxed{\text{On accepte donc l'hypothèse nulle } H_0 \text{ : la cotte moyenne des 50 pièces est bien égale à 15 mm.}}$